興奮性を示す反応拡散系にみられるシェルビンスキーガスケット (反応拡散系 : 生物・化学における現象とモデル)

早瀬, 友美乃

数理解析研究所講究録
1167 巻 2000 年 7-8

興奮性を示す反応拡散系にみられる シェルピンスキーガスケット

お茶の水女子大学大学院人間文化研究科 早瀬友美乃 [1]

反応拡散系のパルスが示す多様な振舞いが、現在、注目を集めている。過去、反応拡散系のパルスは衝突により対消滅するのみと思われてきた。しかし、近年、衝突の際に反射をしたり [1]、ソリトンのように衝突の前後でパルスの形が保存されるような現象が見られている [2, 3]。また、一つのパルスが二つに分裂するパルスの自己複製現象も多くの系でみられるようになった [1-5]。

その結果、それらパルスの相互作用により、複雑な時空間パターンが得られる。リミットサイクル振動と一様平衡解をあわせもつ反応拡散系 [2, 3] の一次元の計算機シミュレーションのにより、パルスの軌跡が時空間パターンとして自己相似図形を生成することがわかっている。その自己相似図形は、パルスの 3 世代を基本とするシェルピンスキー・ガスケットであった。ここで、パルスが分裂により生成され、次に二つに分裂するまでをパルスの 1 世代と呼ぶ。

本稿では、この「シェルピンスキーガスケット」が、先に報告したモデル方程式 [2, 3] のみで形成される特殊な時空間パターンではなく、一般的に興奮性を示す反応拡散系において形成されうる普遍的なものであることを報告する。

初めに、次の Bonhoffer van der Pol 型の反応拡散方程式を考える。

$$\begin{aligned}\tau\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)-v\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+u-\gamma v+I\end{aligned}$$

u は活性因子、v は抑制因子である。ここで非線形項は次の三次関数とする。

$$f(u)=au(u+1)(1-u)$$

パラメータ D_u, D_v, a, γ, I は全て正の整数であり、ここでは系が単安定で興奮性を持つように選ぶ。さらに $D_u << D_v$ とする。

これまでの研究により [6]、τ が十分に大きなところでは動かないパルスが安定に存在することが知られている。また、τ を大きな値から下げて行くと τ_b において安定な動かないパルスは不安定化する。この際、パルスの中心は動かずに幅が振動する breathing motion があらわれ [7] 振動ドメインが形成される。さらに τ を小さくして行くと τ_b^* 以下においては、その振動ドメインすら不安定となる。

逆に τ が小さいところでは伝搬するパルスが安定に存在する。τ を大きくしてゆくと、ある τ_p において安定に伝播するパルスは存在しなくなる。

$\tau_p < \tau < \tau_b^*$ では、動かないパルスも伝播するパルスも安定に存在しない。この τ_p と τ_b^* の中間付近の τ の値において、図 1 にみられる自己相似時空間パターンが見られた。分裂したパルスが衝突の際に対消滅することによりこのような図形が形成される。

[1] E-mail: yumino@newtopia.phys.ocha.ac.jp

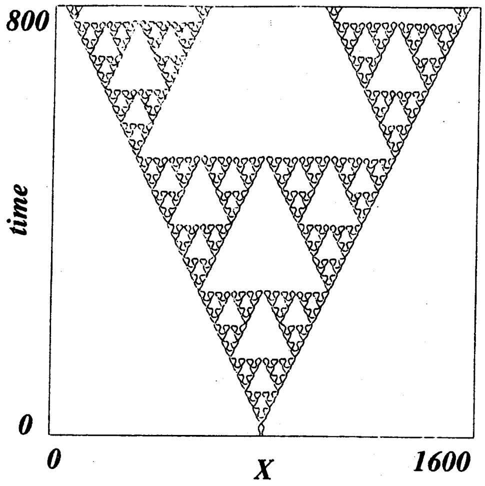

図 1: 時空間パターン。実線は $u=0$ の等高線。

以前シェルピンスキー・ガスケットがみられた系 [2, 3] と比較すると、本稿の系においてはリミットサイクル振動が存在しない。そのため、パルスは衝突におけるパルスの「対生成」はおこらない。「分裂」と「対消滅」によりパルスの２世代を基本単位とするシェルピンスキー・ガスケットが生成される。

また、分裂現象がおこることで有名な Gray-Scott モデルにおいて、同様に時空間パターンに注目した研究をおこなったところ、限られたパラメータ範囲において図３のようなシェルピンスキー・ガスケットが得られた。さらに、Belousov-Zhabotinski 反応のモデル方程式として研究がおこなわれている Prague モデルにおいても、同様のシェルピンスキー・ガスケットが得られることがわかった。

このように、一次元の計算機シミュレーションの結果、４つの異なる非線形性をもつ反応拡散系において、時空間パターンとしてシェルピンスキー・ガスケットが形成されることがわかった。さらに、興味深いことに、これらモデル方程式は「興奮性」という共通の性質を持つものであった。この結果から、シェルピンスキー・ガスケットは「興奮性をもつ反応拡散方程式」において、普遍的に存在するパターンであるといえる。

参考文献

[1] V. Petrov, K. Scott and K. Showalter, Philos. Trans. R. Soc. Lon don Ser. A**347**, 631(1994).

[2] Y.Hayase, J. Phys. Soc. Jpn. **66**, 2584-2588 (1997).

[3] Y.Hayase and T.Ohta, Phys. Rev. Lett. **81**,1726(1998).

[4] K. J. Lee, W. D. McCormick, Q. Ouyang, and H. L. Swinney, NATURE **369**, 215(1994).

[5] Y. Nishiura and D. Ueyama, Physica D, **130**, 73(1999).

[6] A. Ito and T. Ohta, Phys. Rev. A **45**, 8374(1992).

[7] S.Koga and Y.Kuramoto, Prog. Theor. Phys, **63**, 105(1 980).